

Die Pizza-Vermutung

Mathematiker lösen ein 40 Jahre altes Rätsel

Hungrige Menschen brauchen höchstens 40 Sekunden, um eine Pizza gerecht zu teilen. Unter Mathematikern dauert so etwas mehr als 40 Jahre. Dafür haben die Zahlenkünstler nun endgültig gezeigt, wie zwei Personen einen runden italienischen Teigfladen untereinander so aufteilen können, dass beide Esser exakt gleichviel abbekommen, wenn sie abwechselnd je ein Stück nehmen.

Dabei geht es um die klassische runde Pizza, welche mit geraden Schnitten in kuchenstückförmige Happen zerlegt wird. Einfach ist die Sache, wenn alle Schnitte durch den Mittelpunkt der Pizza gehen und gleiche Winkel bilden. Sammeln die beiden Esser umlaufend die Stücke vom Teller, bekommt jeder gleich viel – schon deshalb, weil alle Stücke die gleiche Fläche haben. Wenn sich aber die Schnitte in einem Punkt treffen, der nicht der Mittelpunkt der Pizza ist? Für diesen Fall formulierte das *Mathematics Magazine* bereits Ende der 1960er-Jahre die so genannte Pizza-Vermutung. Doch erst jetzt gelang es, Rick Mabry von der Louisiana State University in Shreveport und Paul Deiermann von der Southeast Missouri State University in Cape Girardeau, sie zu beweisen.

Für eine gerechte Teilung genügt es, wenn ein einziger der Schnitte durch den Mittelpunkt geht. Das teilt die Pizza in zwei gleich große Stücke und bildet eine Symmetrieachse: Die Stücke auf der einen Seite sind Spiegelbilder der anderen Seite. Nehmen beide Esser abwechselnd ein Stück, erhält jeder gleich viel.

Geht indes keiner der Schnitte durch den Mittelpunkt der Pizza, wird es für die Hungrigen komplizierter. Für den einfachen Fall eines einzigen Schnitts, der nicht durch den Mittelpunkt geht, ist natürlich das Stück das Größere, auf dem der Mittelpunkt liegt. Ähnliches gilt, wenn der Kellner zweimal das Messer ansetzt und vier Stücke produziert. Dann erhält derjenige mehr zu essen, der das Stück mit dem Mittelpunkt plus das gegenüber liegende (das das kleinste der vier Stücke ist) bekommt. Überraschenderweise ändert sich das, wenn es noch mehr Schnitte werden.

Für den Fall einer geraden Zahl von Schnitten bewiesen Mathematiker mit elementarer Algebra zwar bereits vor rund 40 Jahren, dass die Pizza gerecht aufgeteilt wird. Doch mit einer ungeraden Anzahl von Schnitten schlugen sich die Wissenschaftler jahrzehntelang herum. Die Vermutung war, dass mit 3, 7, 11, 15, ... Schnitten derjenige mehr bekommt, dem das Stück mit dem Mittelpunkt zufällt, während selbiger mit 5, 9, 13, 17, ... Schnitten zu kurz kommt.

Bei einer ungeraden Anzahl von Schnitten, werden gegenüber liegende Stücke nie demselben Esser zugeteilt. Mabry und Deiermann kalkulierten da-

her die Flächenunterschiede zwischen gegenüberliegenden Abschnitten und addierten diese rund um die Pizza auf. So ließ sich herausfinden, wer am Schluss am meisten Teigfladen verputzt hat. Relativ zügig erledigten die beiden US-Amerikaner mit dieser Methode die Fälle 3, 5 und 7 Schnitte. Ermutigt von diesem Erfolg, versuchten sie sich an dem allgemeinen Beweis. Dabei stießen sie aber auf komplizierte Summen, die Potenzen von trigonometrischen Funktionen enthielten. Über etliche Jahre hinweg knobelten sie zwischendurch immer wieder erfolglos an ihnen. Der Durchbruch kam bei einem Urlaub im Allgäu. „Ich hatte ein schönes Hotelzimmer, eine nette kühle

Der entscheidende Schritt gelang im Allgäu

Umgebung – und keinen Computer“, erzählt der Amerikaner Rick Mabry. Zuvor hatten er und Deiermann den PC genutzt, um ihre Ergebnisse zu testen. Jetzt war Mabry gezwungen, ohne elektronische Hilfe auszukommen, und fand einen Weg, die vertrackten Formeln zu vereinfachen. Nachdem er nach Hause zurückgekehrt war, fand er in der mathematischen Literatur die Wege, um sie auszurechnen.

Der mathematisch gebildete Pizza-Kellner weiß nun also, wie er Streit unter seinen Gästen vermeiden kann. Er muss den runden Teigfladen mit vier, sechs oder acht geraden Schnitten zerteilen, die alle durch einen Punkt gehen und gleiche Winkel zueinander einnehmen. (Das Messer zehn-, zwölf- oder gar 14-mal anzusetzen, macht bei einer normalen Pizzagröße wohl wenig Sinn.)

Ob es Anwendungen außerhalb der Pizzeria für ihre Arbeiten gibt, wissen indes Mabry und Deiermann selbst nicht, und es scheint sie auch wenig zu interessieren. „Mathematiker kümmern sich oft nicht darum, ob ihre Resultate Anwendungen haben, weil die Ergebnisse selbst so schön sind“, sagt Mabry. Allerdings zeigten in den vergangenen Jahrzehnten schon häufiger scheinbar abstrakte Theorien plötzlich praktischen Nutzen. Möglicherweise bekommt daher auch das Pizza-Theorem eines Tages außerhalb der Küche Bedeutung.

Rund um die Pizza fallen den beiden US-Mathematikern bereits weitere Aufgaben ein. Wer bekommt mehr Rand? Und wer mehr Käse? Was ist, wenn die Pizza rechteckig ist? Und wie sieht das Problem in höheren Dimensionen aus? Nun, wenigstens die dritte Dimension hätte möglicherweise eine praktische Relevanz: für die Teilung einer üppig aufgeblähten Calzone. WOLFGANG BLUM

Wie man eine Pizza gerecht teilt

Voraussetzung: Beide Esser (■ A, ■ B) bekommen gleich viele Stücke.